SLOŽENOST ALGORITAMA
I
ODABRANE METODE OPTIMIZACIJE

ZA STUDENTE ELEKTROTEHNIKE

Branko Malešević i Ivana Jovović

Glava 1

1. Pseudoinverzne matrice

1.1 Pseudoinverzne matrice i sistemi linearnih algebarskih jednačina

Neka je dat sistem m linearnih algebarskih jednačina sa realnim koeficijentima i nepoznatim $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned}$$

Za matricu sistema $A = [a_{ij}]_{m\times n} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, kolonu nepoznatih $x = [x_1\ x_2\ \ldots\ x_n]^T$ i kolonu slobodnih članova $b = [b_1\ b_2\ \ldots\ b_m]^T$ dati sistem možemo zapisati i u matričnom obliku $Ax = b$. Prema *Kronecker-Capelli-jevoj teoremi*, sistem $Ax = b$ je saglasan ako i samo ako je rang $B =$ rang A, gde je $B = [a_{ij} \mid b_j]_{m\times(n+1)} = [A \mid b]$.

Teorema 1.1 Sistem $Ax = b$ je saglasan ako i samo ako je $AA^{(1)}b = b$, gde je $A^{(1)}$ proizvoljan $\{1\}$-inverz matrice A.

Dokaz. $\Leftarrow$: Ako je $AA^{(1)}b = b$, onda je $A^{(1)}b$ rešenje sistema.

$\Rightarrow$: Neka je x_0 rešenje sistema $Ax = b$, tj. neka važi da je $Ax_0 = b$. Imamo da je $b = Ax_0 = (AA^{(1)}A)x_0 = (AA^{(1)})Ax_0 = AA^{(1)}b$. ■

Teorema 1.2 Ako sistem $Ax = b$ ima rešenje, onda je ono oblika $x = A^{(1)}b + (I_n - A^{(1)}A)y$, gde je $y \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ proizvoljna matrica.

Dokaz. $\Leftarrow$: Dokažimo da je za proizvoljnu matricu $y \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ sa $x = A^{(1)}b + (I_n - A^{(1)}A)y$ dato rešenje jednačine $Ax = b$. Na osnovu prethodne teoreme važi da je

$$Ax = A(A^{(1)}b + (I_n - A^{(1)}A)y) = AA^{(1)}b + Ay - AA^{(1)}Ay = b + Ay - Ay = b.$$

$\Rightarrow$: Neka je x_0 rešenje sistema $Ax = b$. Dokažimo da postoji matrica $y \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ takva da je $x_0 = A^{(1)}b + (I_n - A^{(1)}A)y$. Iz činjenice da je $Ax_0 = b$, za $y = x_0$ dobijamo da je

$$x_0 = A^{(1)}b + x_0 - A^{(1)}Ax_0.$$

■

Teorema 1.3 Važi da je rang $A =$ rang B ako i samo ako je $AA^{(1)}b = b$, gde je $B = [A \mid b]$.

Dokaz. Ova teorema je spoj Kronecker-Capelli-jeve teoreme i teoreme 1.1.

Izvešćemo dokaz i direktno. Podsetimo se, za matricu A postoje regularne matrice P i Q reda m, odnosno n, takve da važi da je $PAQ = E_r = \left[\begin{array}{c|c} I_r & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{array}\right]$ normalna forma matrice A. Matrice P i Q su proizvodi elementarnih matrica reda m, odnosno n, koje uspostavljaju ekvivalenciju između matrica A i E_r, gde je I_r jedinična matrica i r rang matirce A. Uz to, matrica oblika $X = Q\left[\begin{array}{c|c} I_r & X_1 \\ \hline X_2 & X_3 \end{array}\right]P$, gde je I_r jedinična matrica reda r, a X_1, X_2 i X_3 proizvoljne matrice redom tipa $r\times(m-r)$, $(n-r)\times r$ i $(n-r)\times(m-r)$, jeste $\{1\}$-inverz matrice A. Prema tome, imamo

$$AA^{(1)} = P^{-1}\left[\begin{array}{c|c} I_r & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{array}\right]Q^{-1}Q\left[\begin{array}{c|c} I_r & X_1 \\ \hline X_2 & X_3 \end{array}\right]P = P^{-1}\left[\begin{array}{c|c} I_r & X_1 \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{array}\right]P.$$

Dalje je jednakost $AA^{(1)}b = b$ ekvivalentna sa $P^{-1}\left[\begin{array}{c|c} I_r & X_1 \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{array}\right]Pb = b$. Množenjem navedene matrične jednakosti sa leve strane sa matricom P dobijamo $\left[\begin{array}{c|c} I_r & X_1 \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{array}\right]Pb = Pb$. Uvođenjem smene $c = Pb = \left[\begin{array}{c} c_1 \\ \hline c_2 \end{array}\right]$, gde je $c \in \mathbb{R}^{m\times 1}$, $c_1 \in \mathbb{R}^{r\times 1}$ i $c_2 \in \mathbb{R}^{(m-r)\times 1}$, dobijamo

$$\left[\begin{array}{c|c} I_r & X_1 \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} c_1 \\ \hline c_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} c_1 + X_1c_2 \\ \hline \mathbb{O} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} c_1 \\ \hline c_2 \end{array}\right],$$

što je ekvivalentno sa činjenicom da je $c_2 = \mathbb{O}$. Zaključujemo da je rang $B =$ rang $[A \mid b] =$ rang $(P[A \mid b]) =$ rang $[PA \mid Pb] =$ rang $[PA \mid c] =$ rang $(PA) =$ rang A. ■

Zadatak 1.1 Ispitati da li sistem linearnih algebarskih jednačina

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 2 \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 &= 3 \end{aligned}$$

ima rešenje. Zatim ga rešiti koristeći pseudoinverzne matrice.

Rešenje. Matrica sistema je matrica $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, kolona nepoznatih je $x = [x_1\ x_2\ x_3]^T$, a kolona slobodnih članova $b = [1\ 2\ 3]^T$. Matrični oblik datog sistema je

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

U zadatak 0.2 u materijalima iz Pseudoinverznih matrica smo se bavili određivanjem $\{1\}$-inverza matrice A. Pokazali smo da je rang $A = 2$ i da za matrice $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ i $Q = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ važi da je $PAQ = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ i da je $A^{(1)} = Q \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & y_1 \\ 0 & 1 & y_2 \\ \hline z_1 & z_2 & w \end{array}\right] P$. Na osnovu teoreme 1.1 sistem ima rešenje ako i samo ako je $AA^{(1)}b = b$. Imamo da je $AA^{(1)} = P^{-1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & y_1 \\ 0 & 1 & y_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right] P$. Inverzna matrica matrice P je matrica $P^{-1} = -3 \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{4}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{7}{3} & 2 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 7 & -6 & 1 \end{bmatrix}$. Prema tome, važi da je

$$
\begin{aligned}
AA^{(1)} &= P^{-1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & y_1 \\ 0 & 1 & y_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right] P \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 7 & -6 & 1 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & y_1 \\ 0 & 1 & y_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & y_1 \\ 4 & -3 & 4y_1 - 3y_2 \\ \hline 7 & -6 & 7y_1 - 6y_2 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 + y_1 & -2y_1 & y_1 \\ 4y_1 - 3y_2 & 1 - 8y_1 + 6y_2 & 4y_1 - 3y_2 \\ -1 + 7y_1 - 6y_2 & 2 - 14y_1 + 12y_2 & 7y_1 - 6y_2 \end{bmatrix},
\end{aligned}
$$

odnosno da je

$$
\begin{aligned}
AA^{(1)}b &= \begin{bmatrix} 1 + y_1 & -2y_1 & y_1 \\ 4y_1 - 3y_2 & 1 - 8y_1 + 6y_2 & 4y_1 - 3y_2 \\ -1 + 7y_1 - 6y_2 & 2 - 14y_1 + 12y_2 & 7y_1 - 6y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 + y_1 - 4y_1 + 3y_1 \\ 4y_1 - 3y_2 + 2 - 16y_1 + 12y_2 + 12y_1 - 9y_2 \\ -1 + 7y_1 - 6y_2 + 4 - 28y_1 + 24y_2 + 21y_1 - 18y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},
\end{aligned}
$$

odakle zaključujemo da sistem ima rešenje.

Na osnovu teoreme 1.2 imamo da je rešenje sistema oblika $x = A^{(1)}b + (I_3 - A^{(1)}A)t$, za proizvoljnu matricu $t \in \mathbb{R}^{3\times 1}$. U zadatak 0.2 u materijalima iz Pseudoinverznih matrica odredili smo opšti oblik $\{1\}$-inverza matrice A. Ovde ćemo izabrati jedan partikularni $\{1\}$-inverza matrice A, za matrice $X_1 = [0\,0]^T$, $X_2 = [0\,0]$ i $X_3 = [0]$.

$$
\begin{aligned}
A^{(1)} &= Q \cdot \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \cdot P = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Važi da je $A^{(1)}b = \begin{bmatrix} -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$, $A^{(1)}A = \begin{bmatrix} -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $I_3 - A^{(1)}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ i $(I_3 - A^{(1)}A)t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_3 \\ -2t_3 \\ t_3 \end{bmatrix}$, $t_3 \in \mathbb{R}$. Prema tome,

$$x = A^{(1)}b + (I_3 - A^{(1)}A)t = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_3 \\ -2t_3 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} + t_3 \\ \frac{2}{3} - 2t_3 \\ t_3 \end{bmatrix}, \; t_3 \in \mathbb{R}.$$

□

Zadatak 1.2 Odrediti vrednosti parametara $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tako da sistem

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= \alpha \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= \beta \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 &= \gamma \end{aligned}$$

ima rešenje.

Rešenje. Na osnovu teoreme 1.1 sistem ima rešenje ako i samo ako je $AA^{(1)}c = c$, gde je A matrica sistema, a $c = [\alpha \; \beta \; \gamma]^T$. Primetimo da su matrice sistema iz ovog i prethodnog zadatka jednake, pa se oslanjamo na račun koji smo sproveli u prethodnom zadatku. Za partikularni $\{1\}$-inverz matrice A izabran tako da je $X_1 = [0\,0]^T$, $X_2 = [0\,0]$ i $X_3 = [0]$ imamo da je $A^{(1)}A = P^{-1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right] P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, pa je $AA^{(1)}c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ -\alpha + 2\beta \end{bmatrix}$. Zaključujemo da će dati sistem biti saglasan ako za parametre α, β i γ važi da je $\gamma = -\alpha + 2\beta$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. □

1.2 Najbolje aproksimativno rešenje sistema linearnih algebarskih jednačina

U slučaju kada sistem $Ax = b$ nije saglasan razmatramo aproksimativno rešenje. Npr. jedno takvo rešenje možemo dobiti minimizacijom euklidske norme rezidualnog vektora $r = Ax - b$, koji u slučaju nesaglasnog sistema nije jednak nuli.

Preciznije, skup svih matrica $\mathbb{R}^{n\times 1}$ obrazuje vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$ u odnosu na binarnu operaciju sabiranje matrica i spoljašnju operaciju množenje matrica skalarom. U datom vektorskom prostoru možemo definisati *skalarni proizvod*:

$$\left(\forall x, y \in \mathbb{R}^{n\times 1}\right) \; x \circ y = x^T \cdot y.$$

Odnosno, za $x = [x_1 \; x_2 \; \ldots \; x_n]^T$ i $y = [y_1 \; y_2 \; \ldots \; y_n]^T$ imamo da je

$$x \circ y = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \ldots + x_n \cdot y_n.$$

Normu matrice $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ definišemo sa:

$$\left(\forall x \in \mathbb{R}^{n\times 1}\right)\ ||x|| = \sqrt{x \circ x} = \sqrt{x^T \cdot x}.$$

Za $x = [x_1\ x_2\ \dots\ x_n]^T$ imamo da je:

$$||x|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

Datu normu nazivamo *euklidskom normom*. Kako tražimo ono rešenje sistema $Ax = b$ za koje je euklidska norma vektora $r = Ax - b$ najmanja, dati problem nazivamo *Problemom (metodom) najmanjih kvadrata*. Odgovarajuće rešenje nazivamo *srednje kvadratnim rešenjem*.

Definicija 1.1 Srednje kvadratno rešenje sistema $Ax = b$ je matrica $x_0 \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ za koju važi:

$$\left(\forall x \in \mathbb{R}^{n\times 1}\right)\ ||Ax_0 - b|| \le ||Ax - b||.$$

Ukoliko sistem $Ax = b$ ima rešenje onda ono jeste i srednje kvadratno rešenje. Pokažimo sada da svaki sistem ima srednje kvadratno rešenje.

Lema 1.1 Važi da je $\left(Ax - AA^{(1,3)}b\right) \circ \left(AA^{(1,3)}b - b\right) = 0.$

Dokaz. Iz definicije skalarnog proizvoda sledi da je

$$\begin{aligned}
\left(Ax - AA^{(1,3)}b\right) \circ \left(AA^{(1,3)}b - b\right) &= \left(Ax - AA^{(1,3)}b\right)^T \left(AA^{(1,3)}b - b\right)\\
&= \left(Ax - AA^{(1,3)}b\right)^T \left(AA^{(1,3)} - I_m\right) b\\
&= \left(A\left(x - A^{(1,3)}b\right)\right)^T \left(AA^{(1,3)} - I_m\right) b\\
&= \left(x - A^{(1,3)}b\right)^T A^T \left(AA^{(1,3)} - I_m\right) b.
\end{aligned}$$

Dalje imamo da je

$$\begin{aligned}
A^T\left(AA^{(1,3)} - I_m\right) &= A^T AA^{(1,3)} - A^T = A^T\left(AA^{(1,3)}\right)^T - A^T\\
&= A^T\left(A^{(1,3)}\right)^T A^T - A^T = \left(AA^{(1,3)}A\right)^T - A^T\\
&= A^T - A^T = \mathbb{O}.
\end{aligned}$$

Zamenom u prethodnu jednačinu dobijamo da je $\left(Ax - AA^{(1,3)}b\right) \circ \left(AA^{(1,3)}b - b\right) = 0.$ ■

Lema 1.2 Važi da je $||Ax - b||^2 = \left|\left|Ax - AA^{(1,3)}b\right|\right|^2 + \left|\left|AA^{(1,3)}b - b\right|\right|^2.$

Dokaz. Na osnovu prethodne leme imamo da je

$$\begin{aligned}
||Ax - b||^2 &= \left|\left|Ax - AA^{(1,3)}b + AA^{(1,3)}b - b\right|\right|^2\\
&= \left|\left|Ax - AA^{(1,3)}b\right|\right|^2 + 2\left(Ax - AA^{(1,3)}b\right) \circ \left(AA^{(1,3)}b - b\right) + \left|\left|AA^{(1,3)}b - b\right|\right|^2\\
&= \left|\left|Ax - AA^{(1,3)}b\right|\right|^2 + \left|\left|AA^{(1,3)}b - b\right|\right|^2.
\end{aligned}$$

■

Teorema 1.4 Norma $||Ax-b||$ je najmanja za $x = A^{(1,3)}b$.

Dokaz. Na osnovu prethodne leme važi da je $||Ax-b||^2 = \left|\left|Ax - AA^{(1,3)}b\right|\right|^2 + \left|\left|AA^{(1,3)}b - b\right|\right|^2$. Norma $||Ax-b||$ je najmanja ako i samo ako je $\left|\left|Ax - AA^{(1,3)}b\right|\right|^2 = 0$, odnosno ako i samo ako je $Ax - AA^{(1,3)}b = \mathbb{O}$, tj. ako i samo ako je $Ax = AA^{(1,3)}b$. Za $x = A^{(1,3)}b$ važi da je $Ax = AA^{(1,3)}b$. ■

Teorema 1.5 Neka je data matrica $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Ako je matrica $X \in \mathbb{R}^{n\times m}$ takva da za svaku matricu $b \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ važi da je norma $||A(Xb)-b||$ najmanja, onda je X $\{1,3\}$-inverz matrice A.

Dokaz. Kako je norma $||A(Xb)-b||$ najmanja za svaku matricu $b \in \mathbb{R}^{m\times 1}$, na osnovu prethodne teoreme važi da je $A(Xb) = AA^{(1,3)}b$ za svaku matricu $b \in \mathbb{R}^{m\times 1}$. Prema tome, važi da je $AX = AA^{(1,3)}$. Dalje imamo da je $AXA = AA^{(1,3)}A = A$ i $(AX)^T = (AA^{(1,3)})^T = AA^{(1,3)} = AX$. Odakle zaključujemo da je matrica X $\{1,3\}$-inverz matrice A. ■

Teorema 1.6 Svako srednje kvadratno rešenje sistema $Ax = b$ je oblika

$$x = A^{(1,3)}b + \left(I_n - A^{(1,3)}A\right)y,$$

gde je $y \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ proizvoljna matrica.

Dokaz. Dokažimo da je za proizvoljnu matricu $y \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ sa $x = A^{(1,3)}b + (I_n - A^{(1,3)}A)y$ dato srednje kvadratno rešenje sistema $Ax = b$. Važi da je

$$Ax = A(A^{(1,3)}b + (I_n - A^{(1,3)}A)y) = AA^{(1,3)}b + Ay - AA^{(1,3)}Ay = AA^{(1,3)}b + Ay - Ay = AA^{(1,3)}b.$$

Na osnovu teoreme 1.4 imamo da je za $x = A^{(1,3)}b + (I_n - A^{(1,3)}A)y$ norma $||Ax-b||$ najmanja, pa je $x = A^{(1,3)}b + (I_n - A^{(1,3)}A)y$ srednje kvadratno rešenje sistema $Ax = b$. ■

Zadatak 1.3 Odrediti srednje kvadratno rešenje sistema

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 2 \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 &= 5. \end{aligned}$$

Rešenje. Na osnovu zadatka 1.2 dati sistem nema rešenje, jer $5 \neq -1 + 2\cdot 2$. Prema prethodnoj teoremi opšte srednje kvadratno rešenje sistema $Ax = b$ glasi $x = A^{(1,3)}b + (I_3 - A^{(1,3)}A)t$, za proizvoljnu matricu $t \in \mathbb{R}^{3\times 1}$. Na osnovu zadatka 0.20 iz materijala Pseudoinverzne matrice imamo da je opšti $\{1,3\}$-inverz matrice A:

$$A^{(1,3)} = Q\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ \hline z_1 & z_2 & w \end{array}\right]P = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ \hline z_1 & z_2 & w \end{array}\right]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Za $z_1 = z_2 = w = 0$ dobijamo partikularni $\{1,3\}$-inverz matrice A:

$$\begin{aligned} A^{(1,3)} &= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Dalje je $A^{(1,3)} b = \begin{bmatrix} -\frac{7}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Imamo i da je

$$A^{(1,3)} A = \begin{bmatrix} -\frac{7}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

i

$$I_3 - A^{(1,3)} A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Prema tome važi da je $\left(I_3 - A^{(1,3)} A\right) t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_3 \\ -2t_3 \\ t_3 \end{bmatrix}$ i

$$x = A^{(1,3)} b + \left(I_3 - A^{(1,3)} A\right) t = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_3 \\ -2t_3 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} + t_3 \\ -2t_3 \\ t_3 \end{bmatrix}, \ t_3 \in \mathbb{R}.$$

Za rezidualni vektor r važi da je:

$$r = Ax - b = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} + t_3 \\ -2t_3 \\ t_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{8}{3} \\ \frac{14}{3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Norma rezidualnog vektora r je jednaka $||r|| = \sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$. Primetimo još i da je geometrijsko mesto tačaka srednje kvadratnih rešenja datog sistema prava, zadata parametarskom jednačinom:

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{2}{3} + t, \\ y &= -2t, \\ z &= t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

□

1.2.1 Normalan sistem

Definicija 1.2 *Normalan sistem* sistema linearnih algebarskih jednačina $Ax = b$ je sistem:

$$A^T Ax = A^T b.$$

Teorema 1.7 Svako srednje kvadratno rešenje x_0 sistema $Ax = b$ je rešenje normalnog sistema $A^T Ax = A^T b$.

Dokaz. Na osnovu teoreme 1.6 svako srednje kvadratno rešenje sistema $Ax = b$ je oblika $x = A^{(1,3)} b + \left(I_n - A^{(1,3)} A\right) y$, gde je $y \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ proizvoljna matrica. Važi da je

$$A^T Ax = A^T AA^{(1,3)} b + \left(A^T A - A^T AA^{(1,3)} A\right) y.$$

Kako je $AA^{(1,3)} A = A$ i $A^T AA^{(1,3)} = A^T \left(AA^{(1,3)}\right)^T = A^T \left(A^{(1,3)}\right)^T A^T = \left(AA^{(1,3)} A\right)^T = A^T$ imamo da je $A^T Ax = A^T b + (A^T A - A^T A)\, y = A^T b$. ■

Važi i obrat tvrđenja. Svako rešenje normalnog sistema $A^T Ax = A^T b$ je srednje kvadratno rešenje sistema $Ax = b$.

Zadatak 1.4 Za podatke

x	1	2	3	4
$f(x)$	4	4	6	10

odrediti realne parametre p i q u linearnoj regresiji $f(x) = px + q$, tj. odrediti pravu koja najbolje aproksimira date podatke.

Rešenje. Za date podatke

x	1	2	3	4
$f(x)$	4	4	6	10

važi da je

$$\begin{aligned} p+q &= 4 \\ 2p+q &= 4 \\ 3p+q &= 6 \\ 4p+q &= 10. \end{aligned}$$

Dati sistem linearnih algebarskih jednačina nije saglasan. Rešenje prve dve jednačine sistema $p = 0$ i $q = 4$ ne zadovoljava druge dve jednačine. Sistem ćemo zapisati u matričnom obliku $Ax = b$, gde je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Naš zadatak je da nađemo srednje kvadratno rešenje datog sistema $x = A^{(1,3)} b + \left(I_2 - A^{(1,3)} A\right) y$.

Za matricu A važi

$$
\begin{aligned}
[A \mid I] &= \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \cong \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \\
&\cong \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \cong \left[\begin{array}{cc|cccc} 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \\
&\cong \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right].
\end{aligned}
$$

Normalna forma matrice A je matrica

$$
E_2 = \left[\begin{array}{c} I_2 \\ \hline \mathbb{O} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right].
$$

Matrica transformacija vrsta je matrica

$$
P = \left[\begin{array}{rrrr} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right].
$$

Imamo da je

$$
PP^T = \left[\begin{array}{rrrr} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{rrrr} -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{rr|rr} 2 & -3 & -3 & -5 \\ -3 & 5 & 4 & 7 \\ \hline -3 & 4 & 6 & 8 \\ -5 & 7 & 8 & 14 \end{array}\right].
$$

Važi da je

$$
S_2 = \left[\begin{array}{rr} -3 & -5 \\ 4 & 7 \end{array}\right],\ S_4 = \left[\begin{array}{rr} 6 & 8 \\ 8 & 14 \end{array}\right],\ \det S_4 = \left|\begin{array}{rr} 6 & 8 \\ 8 & 14 \end{array}\right| = 84 - 64 = 20,
$$

$$
S_4^{-1} = \frac{1}{20}\left[\begin{array}{rr} 14 & -8 \\ -8 & 6 \end{array}\right],\ -S_2S_4^{-1} = -\frac{1}{10}\left[\begin{array}{rr} -3 & -5 \\ 4 & 7 \end{array}\right]\left[\begin{array}{rr} 7 & -4 \\ -4 & 3 \end{array}\right] = \frac{1}{10}\left[\begin{array}{rr} -1 & -3 \\ 0 & 5 \end{array}\right].
$$

Prema tome, $\{1,3\}$-inverz matrice A je matrica

$$
\begin{aligned}
A^{(1,3)} &= \left[\begin{array}{c|c} I_2 & -S_2S_4^{-1} \end{array}\right] P = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right] \left[\begin{array}{rrrr} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{cccc} -\frac{3}{10} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right].
\end{aligned}
$$

Dalje imamo da je

$$I_2 - A^{(1,3)}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{3}{10} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Srednje kvadratno rešenje datog sistema je

$$x = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = A^{(1,3)}b = \begin{bmatrix} -\frac{3}{10} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Primetimo da smo u ovom zadatku dobili da je razlika $I_2 - A^{(1,3)}A = \mathbb{O}$. Ispostavlja se da to nije slučajno. Zaista, ako je rang matrice $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ jednak broju kolona n ($n \leq m$), onda za $\{1,3\}$-inverz matrice A važi da je $A^{(1,3)}A = I_n$, jedinstven je i jednak je Moore–Penrose-ovom inverzu matrice A. Neka je P proizvod elementarnih matrica reda m takvih da je $PA = E_n = \begin{bmatrix} I_n \\ \hline \mathbb{O} \end{bmatrix}_{m\times n}$ normalna forma matrice A. Tada je $\{1\}$-inverz matrice A dat sa $X = [I_n \mid X_1]_{n\times m} P$. Imamo da je $XA = [I_n \mid X_1]_{n\times m} PP^{-1} \begin{bmatrix} I_n \\ \hline \mathbb{O} \end{bmatrix}_{m\times n} = I_n$. Neka je $S = P \cdot P^T = \left[\begin{array}{c|c} S_1 & S_2 \\ \hline S_3 & S_4 \end{array}\right]$, gde su S_1, S_2, S_3 i S_4 matrice tipa $n\times n$, $n\times(m-n)$, $(m-n)\times n$ i $(m-n)\times(m-n)$. Tada je $\{1,3\}$-inverz matrice A jedinstveno određena matrica $A^{(1,3)} = \left[\begin{array}{c|c} I_n & -S_2\cdot S_4^{-1} \end{array}\right] P$, koja se poklapa sa odgovarajućim Moore–Penrose-ovim inverzom. Prema tome, kod sistema koji nisu saglasni i kod kojih je rang matrice sistema jednak broju promenljivih, *predeterminisanih sistema*, srednje kvadratno rešenje je jedinstveno i glasi $x = A^{(1,3)}b$.

Sa druge strane, srednje kvadratno rešenje sistema $Ax = b$ jednako je rešenju normalnog sistema koji odgovara datom. Odgovarajući normalni sistem dobijamo množenjem sleva jednakosti $Ax = b$ sa matricom A^T, tj. to je sistem $A^TAx = A^Tb$. Ako je rang matrice A jednak n, onda je i rang matrice A^TA jednak n, odnosno matrica A^TA je regularna. Da bismo pokazali da je matrica A^TA regularna, dovoljno je pokazati da homogeni sistem $A^TAx = \mathbb{O}$, gde je $x = [x_1\ x_2\ \dots\ x_n]^T \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ i $\mathbb{O}$ nula-matrice tipa $n\times 1$, ima jedinstveno rešenje, tj. da je jedino rešenje datog sistema trivijalno rešenje $x = \mathbb{O}$. Množenjem jednačine $A^TAx = \mathbb{O}$ sa leve strane sa x^T dobijamo da je $x^TA^TAx = 0$, odnosno da je $(Ax)^T(Ax) = 0$. Ako uvedemo smenu da je $Ax = y \in \mathbb{R}^{m\times 1}$, za $y = [y_1\ y_2\ \dots\ y_m]^T$, dobijamo da je $y^Ty = [y_1\ y_2\ \dots\ y_m] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots y_n \end{bmatrix} = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2 = 0$, što je jedino moguće za $y_1 = y_2 = \dots = y_n = 0$, tj. za $y = \mathbb{O}$. Vraćanjem smene dobijamo da je $Ax = \mathbb{O}$. Dati sistem možemo zapisati i kao $x_1A_{\downarrow 1} + x_2A_{\downarrow 2} + \dots + x_nA_{\downarrow n} = \mathbb{O}$, gde su $A_{\downarrow 1}, A_{\downarrow 2} \dots A_{\downarrow n}$ kolone matrice A. Kako je rang matrice A jednak n, kolone $A_{\downarrow 1}, A_{\downarrow 2} \dots A_{\downarrow n}$ su linearno nezavisni vektori, pa važi da je njihova linearna kombinacija jednaka $\mathbb{O}$ ako i samo ako je $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, tj. ako je $x = \mathbb{O}$. Prema tome, matrica A^TA je regularna matrica, odakle sledi da je rešenje sistema $A^TAx = A^Tb$ dato sa $x = \left(A^TA\right)^{-1}A^Tb$. Inače, $\{1,3\}$-inverz realne matrice A tipa $m\times n$, kod koje je $n \leq m$ i čiji je rang jednak n je $A^{(1,3)} = \left(A^TA\right)^{-1}A^T$. Zaista, za $\{1,3\}$-inverz X matrice A važi da je $AXA = A$ i $(AX)^T = AX$. Odakle važi da je $A \overset{(1)}{=} AXA \overset{(3)}{=} (AX)^TA = X^TA^TA$. Ako je rang matrice A jednak broju kolona n, onda je matrica A^TA regularna matrica reda n, odakle sledi da je $X^T = A\left(A^TA\right)^{-1}$, odnosno da je $X = \left(A\left(A^TA\right)^{-1}\right)^T = \left(\left(A^TA\right)^{-1}\right)^TA^T$. Pokažimo još da za proizvoljnu regularnu matricu M reda n važi daje $\left(M^T\right)^{-1} = \left(M^{-1}\right)^T$. Ako transponujemo jednakost $MM^{-1} = M^{-1}M = I_n$ dobijamo da je $\left(M^{-1}\right)^T M^T = M^T \left(M^{-1}\right)^T = I_n$, odnosno da je $\left(M^{-1}\right)^T$ inverzna matrica matrice M^T. Kako je inverzna matrica matrice jedinstvena imamo da je $\left(M^T\right)^{-1} = \left(M^{-1}\right)^T$. Prema tome, $X = \left(\left(A^T A\right)^T\right)^{-1} A = \left(A^T A\right)^{-1} A^T$.

Drugi način da nađemo srednje kvadratno rešenje sistema $Ax = b$ je da rešimo sistem $A^T Ax = A^T b$. Imamo da je

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 & 10 \\ 10 & 4 \end{bmatrix},$$

$$\det\left(A^T A\right) = \begin{vmatrix} 30 & 10 \\ 10 & 4 \end{vmatrix} = 120 - 100 = 20, \left(A^T A\right)^{-1} = \frac{1}{20}\begin{bmatrix} 4 & -10 \\ -10 & 30 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \left(A^T A\right)^{-1} A^T &= \tfrac{1}{20}\begin{bmatrix} 4 & -10 \\ -10 & 30 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \tfrac{1}{20}\begin{bmatrix} -6 & -2 & 2 & 6 \\ 20 & 10 & 0 & -10 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{3}{10} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Rešenje normalnog sistema je

$$x = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \left(A^T A\right)^{-1} A^T b = \begin{bmatrix} -\frac{3}{10} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

□

Zadatak 1.5 Za podatke

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	-4	-1	-1	11	20

odrediti realne parametre p, q i r u kvadratnoj regresiji $f(x) = px^2 + qx + r$, tj. odrediti parabolu koja najbolje aproksimira date podatke.

Rešenje. Za date podatke

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	-4	-1	-1	11	20

važi da je

$$\begin{aligned} r &= -4 \\ p+q+r &= -1 \\ 4p+2q+r &= -1 \\ 9p+3q+r &= 11 \\ 16p+4q+r &= 20. \end{aligned}$$

Dati sistem linearnih algebarskih jednačina nije saglasan. Rešenje prve tri jednačine sistema $r = -4$, $p = -\dfrac{3}{2}$ i $q = \dfrac{9}{2}$ ne zadovoljava poslednje dve jednačine. Sistem ćemo zapisati u matričnom obliku $Ax = b$, gde je

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad b = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ -1 \\ 11 \\ 20 \end{bmatrix}.$$

Naš zadatak je da nađemo srednje kvadratno rešenje datog sistema. Srednje kvadratno rešenje sistema $Ax = b$ jednako je rešenju normalnog sistema $A^T Ax = A^T b$. Imamo da je

$$A^T A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 & 16 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 354 & 100 & 30 \\ 100 & 30 & 10 \\ 30 & 10 & 5 \end{bmatrix},$$

$$\left(A^T A\right)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{14} & -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{87}{70} & -\frac{27}{35} \\ \frac{1}{7} & -\frac{27}{35} & \frac{31}{35} \end{bmatrix}, \; \left(A^T A\right)^{-1} A^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & -\frac{1}{14} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{14} & \frac{1}{7} \\ -\frac{27}{35} & -\frac{13}{70} & \frac{4}{7} & \frac{27}{70} & -\frac{13}{35} \\ \frac{31}{35} & \frac{9}{35} & -\frac{3}{35} & -\frac{1}{7} & \frac{3}{35} \end{bmatrix}.$$

Rešenje normalnog sistema je

$$x = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \left(A^T A\right)^{-1} A^T b = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & -\frac{1}{14} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{14} & \frac{1}{7} \\ -\frac{27}{35} & -\frac{13}{70} & \frac{4}{7} & \frac{27}{70} & -\frac{13}{35} \\ \frac{31}{35} & \frac{9}{35} & -\frac{3}{35} & -\frac{1}{7} & \frac{3}{35} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ -1 \\ 11 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12}{7} \\ -\frac{6}{7} \\ -\frac{25}{7} \end{bmatrix}.$$

□

Ukoliko se u zadatku traži da se za date podatke odredi eksponencijalna regresija, tj. da se dati podaci aproksimiraju eksponencijalnom funkcijom $f(x) = pe^{qx}$ ili $f(x) = pq^x$, logaritmovanjem datih jednakosti i podataka zadatak svodimo na linearnu regresiju, $\ln f(x) = \ln p + qx$, odnosno $\ln f(x) = \ln p + \ln q \cdot x$.

Napomenimo još da nam je od interesa da za neodređeni sistem $Ax = b$ odredimo ono realno rešenje koje je minimalne norme, tj. ono rešenje x_0 za koje važi sledeća implikacija:

$$\left(\forall x \in \mathbb{R}^{n\times 1}\right) \; Ax = b \Rightarrow ||x_0|| \leq ||x||.$$

Može se pokazati da je *rešenje minimalne norme* sistema $Ax = b$ matrica $x_0 = A^{(1,4)} b$. Ukoliko je rang matrice A jednak broju vrsta m, sistem $Ax = b$ nazivamo *nedeterminisanim sistemom* i imamo da je njegovo rešenje minimalne norme dato sa $x_0 = A^T \left(AA^T\right)^{-1} b$. U ovom slučaju za $\{1,4\}$-inverz matrice A važi da je $AA^{(1,4)} = I_m$, jedinstven je i jednak je Moore–Penrose-ovom inverzu matrice A.

Najbolje aproksimativno rešenje sistema $Ax = b$ je srednje kvadratno rešenje minimalne norme. Može se pokazati da je najbolje aproksimativno rešenje sistema $Ax = b$ matrica $x_0 = A^+ b$, gde je A^+ Moore–Penrose-ov inverz matrice A. Ukoliko je rang matrice A manji od $\min\{n,m\}$ onda je $Ax = b$ *sistem sa rang defektom*, matrice $A^T A$ i AA^T su singularne matrice, dok $\{1,3\}$- inverz i $\{1,4\}$-inverz matrice A nisu jedinstveno određeni.